**შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი**

**შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის**

| | |
|---|---|
| მაგიდა № | 30.04.2011/ მათ/ III/ 266 |

ამოცანა № 1 | გვერდი № 1

პირველი ნაბიჯი ვაჩვენოთ, რომ თუ $f\left(\frac{k+1}{2011}\right)$ და $f\left(\frac{k}{2011}\right)$ ორივე მაგალითა და ორივე იყოფა $p$ მარტივ რიცხვზე, მაშინ $k+1 \vdots 2011$ ან $k \vdots 2011$. მართლაც:

$$f\left(\frac{k}{2011}\right)=\frac{2011\cdot k^2}{2011^2}+\frac{\beta a k}{2011}+\gamma \quad \text{და} \quad f\left(\frac{k+1}{2011}\right)=\frac{2011(k+1)^2}{2011^2}+\frac{(k+1)a}{2011}+\gamma \quad \text{ანუ}$$

$$f\left(\frac{k}{2011}\right)=\frac{k^2}{2011}+\frac{ak}{2011}+\gamma \quad \text{და} \quad f\left(\frac{k+1}{2011}\right)=\frac{(k+1)^2}{2011}+\frac{a(k+1)}{2011}+\gamma.$$

ანუ ორივე $\gamma$-მაგალითა მართალია $\frac{k^2}{2011}+\frac{ak}{2011}$-ც მაგალითა ანუ $\frac{k^2+ak}{2011}$-მაგალითა ანუ $k(a+k) \vdots 2011$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $(k+1)(a+k+1) \vdots 2011$. ასევე თუ $k \vdots 2011$ მაშინ $k+1$ არ იყოფა 2011 და თუ $a+k \vdots 2011$ მაშინ $a+k+1$ არ იყოფა 2011-ზე, და პირიქით ანუ ერთიდანვე ვთქვა $k$ და $k+1$ მიუღებელია 2011-ზე და ვიცი $a+k$ და $a+k+1$ მართალია თუ: $k \vdots 2011$ მაშინ $a+k+1 \vdots 2011$ (ორივე $k+1$ არ იყოფა 2011-ზე) ანუ $a+1 \vdots 2011$ თუ $k+1 \vdots 2011$ მაშინ $a+k \vdots 2011$ (ორივე $k$ არ იყოფა 2011-ზე) ანუ $a-1 \vdots 2011$. ანუ მივიღეთ, რომ ან $a+1 \vdots 2011$ ან $a-1 \vdots 2011$

ჩვენ თუ $a+1 \vdots 2011$ მაშინ $k \vdots 2011$ და თუ $a-1 \vdots 2011$ მაშინ $k+1 \vdots 2011$ ანუ მივიღეთ რომ [illegible] $k$-[illegible] [illegible] $f\left(\frac{k}{2011}\right)$ და $f\left(\frac{k+1}{2011}\right)$, [illegible] მთელია და იყოფა მარტივ $p$-ზე [illegible]:

$$\begin{cases} k \vdots 2011 \\ a+1 \vdots 2011 \\ k+1 \vdots 2011 \\ a-1 \vdots 2011 \end{cases}$$

ანუ მივიღეთ რომ ან $\frac{k}{2011}$-ია მთელი რიცხვი ან $\frac{k+1}{2011}$ [illegible] მთელი. [illegible] [illegible]

[illegible] $p$-[illegible] [illegible] $k$-[illegible] რომ $f\left(\frac{k}{2011}\right)$ და $f\left(\frac{k+1}{2011}\right)$ [illegible] მთელია და იყოფა $p$-ზე ანუ მივიღეთ რომ [illegible] $p$ [illegible] [illegible] [illegible] $x$ რომ $f(x) \vdots p$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $m$ რომ $f\left(\frac{m}{2011}\right) \vdots 2011$ და მთელია და $f\left(\frac{m+1}{2011}\right) \vdots 2011$ და [illegible] მთელია და ჩვენ $m \vdots 2011$ ან $m+1 \vdots 2011$ ანუ:

$\frac{2011 \cdot m^2}{2011^2} + \frac{am}{2011} + 8 \vdots 2011$ და $\frac{2011 \cdot (m+1)^2}{2011^2} + \frac{(m+1)a}{2011} + 8 \vdots 2011$ ანუ

$\frac{m^2 + am}{2011} + 8 \vdots 2011$ და $\frac{(m+1)^2 + a(m+1)}{2011} + 8 \vdots 2011$ [illegible]

**შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი**

**შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის**

| | |
|---|---|
| მაგიდა № | 30.04.2011/ მათ/ III/ 266 |

ამოცანა № 1 | გვერდი № 3

გამოვიკვლიოთ ფუნქციის $f(m+1)$ და $f(m)$ ის სხვაობა:

$$f(m+1)-f(m)=\frac{(m+1)^2+a(m+1)}{2011}+\cancel{b}-\frac{m^2+am}{2011}-\cancel{b}=\frac{(m+1)^2-m^2+a(m+1)-am}{2011}=$$

$$=\frac{2m+1+a}{2011}$$

ის მივიღეთ რომ $\frac{2m+1+a}{2011}\vdots 2011$

| | |
|---|---|
| მაგიდა № | 30.04.2011/ მათ/ III/ 266 |

ამოცანა № 3 | გვერდი № 1

თვალსაჩინოებისათვის ავიღოთ ჯერ 7x7 ზე შემდეგ ამოცანის გადაჭრა გვაქვს 2011x2011 ისევ

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | X | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 6 |

ეს შეიკვეთა ორი შემთხვევაში: შუა ოთხში (სადაც 7-ანებია სადაც ოთხია ალბათობა) ჩვენთან ერთად X. ხოლო შემთხვევაში სხვა ოთხეულში ჩვენთან ერთად (პირობებიდან) შეიძლება განსხვავებულად იმ ოთხეულში ერთეული ერთეული X-ის მარჯვნივ ან მარცხენა შეიძლება იყოს! ( X-6; X-5; X-4; X-3; X-2; X-1; X; X+1; X+2; X+3; X+4; X+5; X+6) ანუ დავალ ნიშანი hXh (ეს შემთხვევაში h=7) გვაქვს ცხრილში X±(h-1) ერთეულის ალბათობა იქნება 4 (ანუ X-ისგან h-1-ის განსხვავებულობის) X±(h-2)-ერთეულის 2·4. X±(h-3) ერთეულის 3·4 და ა.შ. X±(h-(h-1)/4) ერთეულის ალბათობა იქნება $4\cdot\frac{h-1}{4}=h-1$ ანუ-ბოლოს X±1 ერთეულის ალბათობა (პირობებიდან) იქნება 4. X±2 ერთეულის 2·4 და ა.შ. $h\pm\frac{h-1}{4}$ ერთეულის ალბათობა იქნება პირობებიდან $4\cdot\frac{h-1}{4}=h-1$. ანუ ჩვენ შემთხვევაში

| | |
|---|---|
| მაგიდა № | 30.04.2011/ მათ/ III/ 266 |

ამოცანა № 3 გვერდი № 2

$x \pm 1$ ადგილზე და $x \pm (n-1) = x \pm 6$ ადგილზე შეიტანება 4

$x \pm 2$-ზე და $x \pm 5$-ზე 8 და [illegible].

[illegible] ეს იმ ადგილზე შეიტანება ამბობს ერთმანეთისაგან $x$-ამდე $n$-ზე ნაკლები იქნება $49-4$. ისევე ამბობს $n$-ზე ნაკლები და 1-ზე მეტი $49-4-4$ ... ისევ ამბობს $n$-ზე 2-ზე მეტი $49-4-4-8-8=25$ ადგილზე ადგილზე შეიძლება ყოფილიყო $49-4$ [illegible]: [illegible], მაგრამ ეს ორი ერთი იქნება ერთი ტიპიერი მიჯალული 2014 ×(2011 – ზე) ალბათობა.